第 38卷第 5期　　数学的实践与认识　　Vol. 38　No. 5
2008年 3月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　March, 2008

一个新的 F. Smarandache函数的值分布

赵红星[1,2]，　叶正麟[1]

(1. 西北工业大学理学院 应用数学系，陕西 西安　710072)
(2. 榆林学院 数学系，陕西 榆林　719000)

摘要：　目的：定义一个新的 F. Smarandache函数 $\bar{S}(n)$，并研究其值分布问题.方法：利用初等方法及解析方法.结果：给出了函数 $\bar{S}(n)$ 与 n 的最小素因子函数 $p(n)$ 的均方差定理.结论：获得了一个较强的渐近公式.

关键词：　新的 Smarandache函数；值分布性质；均方差定理

1　引言及结果

对任意正整数 n，著名的 F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k 使得 $n \mid [1,2,\cdots,k]$，其中 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数.例如 $SL(n)$ 的前几个值是 $SL(1)=1, SL(2)=2, SL(3)=3, SL(4)=4, SL(5)=5, SL(6)=3, SL(7)=7, SL(8)=8, SL(9)=9, SL(10)=5, SL(11)=11, SL(12)=4, SL(13)=13, SL(14)=7, SL(15)=5, \cdots$.关于 $SL(n)$ 的初等性质，不少学者进行过研究，获得了一系列结果，参阅文献 [3]，[4]及 [6].事实上当 $n=p_1^{T_1}p_2^{T_2}\cdots p_s^{T_s}$ 为 n 的标准分解式时，容易推出

$$SL(n)=\max\{p_1^{T_1},p_2^{T_2},\cdots,p_s^{T_s}\}.$$

我们把满足 $f(n)=\max\{f(p_1^{T_1}),f(p_2^{T_2}),\cdots,f(p_s^{T_s})\}$ 的算术函数 $f(n)$ 称为 Smarandache可乘函数.因此 $SL(n)$ 是一个 Smarandache可乘函数.

受到 Smarandache可乘函数定义的启发，本文定义了一个新的 Smarandache型函数 $\bar{S}(n)$ 如下：$\bar{S}(1)=1$，当 $n>1$ 且 $n=p_1^{T_1}p_2^{T_2}\cdots p_s^{T_s}$ 为 n 的标准分解式时定义：

$$\bar{S}(n)=\min\{p_1^{T_1},p_2^{T_2},\cdots,p_s^{T_s}\}.$$

通过研究，我们发现函数 $\bar{S}(n)$ 与著名的 F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 有许多相似的性质，例如当 n 为素数的方幂时，$\bar{S}(n)=SL(n)$.更有意义的是我们可以给出 $\bar{S}(n)$ 的一个较强的均方差定理.具体地说也就是证明下面的：

定理 1　对任意实数 $x>1$ 及给定的正整数 k，我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\bar{S}(n)=x^2\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

定理 2　对任意实数 $x>1$ 及给定的正整数 k，我们有渐近公式

收稿日期：2007-05-31
基金项目：国家自然科学基金资助 (10671155)

$$\sum_{n\leq x}(\overline{S}(n)-p(n))^2=x^{\frac{5}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $p(n)$ 表示 n 的最小素因子, $b_1=\frac{2}{5}$, $b_i\,(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

2　定理的证明

这节我们直接给出定理的证明.首先证明定理 1.对任意实数 $x>1$, 设 $\mathrm{c}(x)$ 表示不超过 x 的素数个数,即就是 $\mathrm{c}(x)=\sum_{p\leq x}1$. 则由文献 [7]知对任意给定的正整数 k, 我们有

$$\mathrm{c}(x)=x\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),\qquad(1)$$

其中 $c_1=1$, $c_i\,(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

现在我们将区间 $[1,x]$中的所有正整数 n 分为三类: $n=1$; 所有素数集合 A; 所有合数集合 B. 当 n为合数时,显然要么 $n=p^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{T}\geq 2$; 要么 $\overline{S}(n)\leq\overline{\quad n}$. 事实上因为当合数 n 不是素数的方幂时, n 至少含有两个不同的素因子,由 $\overline{S}(n)$ 的定义立刻得到 $\overline{S}S(n)=\min\{p_1^{\mathrm{T}_1},p_2^{\mathrm{T}_2},\cdots,p_s^{\mathrm{T}_s}\}\leq\overline{\quad n}$. 由此并注意到(1)式,分部积分法及 Abel恒等式(参阅文献 [5]定理 4.2)我们有

$$\sum_{n\leq x}\overline{S}(n)=1+\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in a}}\overline{S}(n)+\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in B}}\overline{S}(n)=1+\sum_{p\leq x}p+O\Big(\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in B}}\overline{\quad n}\Big)$$

$$=x\cdot\mathrm{c}(x)-\int_{\frac{3}{2}}^{x}\mathrm{c}(y)\,\mathrm{d}y+O(x^{\frac{3}{2}})$$

$$=x^2\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{1}{\ln^{k+1}x}\right)\right)-\int_{\frac{3}{2}}^{x}\left[y\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{k+1}y}\right)\right]\mathrm{d}y$$

$$=x^2\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_i\,(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.于是证明了定理 1.

现在证明定理 2.此时我们将区间 $[1,x]$中的所有正整数 n分为四类: $n=1$; 所有满足 $\mathrm{k}(n)=1$的正整数集合 C; 所有满足 $\mathrm{k}(n)=2$的正整数集合 D; 所有满足 $\mathrm{k}(n)\geq 3$的正整数集合 E, 其中 $\mathrm{k}(n)$ 表示 n 的所有不同素因数的个数,不包括重数.即就是当 $n=p_1^{\mathrm{T}_1}p_2^{\mathrm{T}_2}\cdots p_s^{\mathrm{T}_s}$ 为 n 的标准分解式时, $\mathrm{k}(n)=s$. 令 $p(n)$ 表示 n 的最小素因子.于是注意到 $p(1)=0$及 $\overline{S}(1)=1$, 我们有

$$\sum_{n\leq x}(\overline{S}(n)-p(n))^2=1+\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in C}}(\overline{S}(n)-p(n))^2+\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in D}}(\overline{S}(n)-p(n))^2$$

$$+\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in E}}(\overline{S}(n)-p(n))^2.\qquad(2)$$

显然当 $n\in C$时有 $n=p^{\mathrm{T}}$, 此时由 $\overline{S}(n)$的定义知 $\overline{S}(p^{\mathrm{T}})=p^{\mathrm{T}}$, $p(n)=p$, $\overline{S}(p)-p(p)=0$. 于是应用(1)式及 Abel恒等式我们可得

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in C}}(\overline{S}(n)-p(n))^2=\sum_{p^{\mathrm{T}}\leq x}(p^{\mathrm{T}}-p)^2=\sum_{\substack{p^{\mathrm{T}}\leq x\\ \mathrm{T}\geq 2}}(p^{\mathrm{T}}-p)^2$$

$$= \sum_{p\le\sqrt{x}} (p^4 - 2p^3 + p^2) + O\Big(\sum_{3\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}} p^{2\alpha}\Big)$$

$$= x^2\cdot\pi(\sqrt{x}) - \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{x}} 4y^3\cdot\pi(y)\,\mathrm{d}y + O(x^{\frac{7}{3}})$$

$$= x^{\frac{5}{2}}\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{\ln^{k+1}\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$- \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{x}} 4y^3\cdot\left[y\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i y} + O\left(\frac{y}{\ln^{k+1} y}\right)\right]\mathrm{d}y$$

$$= x^{\frac{5}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right), \qquad (3)$$

其中 $b_1 = \frac{2}{5}$, $b_i\,(i = 2, 3, \cdots, k)$ 为可计算的常数.

当 $n\in E$ 时, $n = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_s^{\alpha_s}$ 至少有三个不同的素因子,所以

$$\bar{S}(n) \le [\bar{S}(p_1^{\alpha_1})\bar{S}(p_2^{\alpha_2})\cdots\bar{S}(p_s^{\alpha_s})]^{\frac{1}{\omega(n)}} = n^{\frac{1}{\omega(n)}} \le n^{\frac{1}{3}}. \qquad (4)$$

利用估计式(4)我们立刻得到平凡估计

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in E}} (\bar{S}(n) - p(n))^2 \ll \sum_{n\le x} n^{\frac{2}{3}} \ll x^{\frac{5}{3}}. \qquad (5)$$

当 $n\in D$ 时, n 恰好有两个不同的素因子,可设 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ 且 $p_1 < p_2$. 此时容易推出估计式 $\bar{S}(n) \le \sqrt{n}$. 进一步若 $\alpha_1 = 1$, 则 $\bar{S}(n) = p_1 = p(n)$, 从而 $(\bar{S}(n) - p(n))^2 = 0$. 于是有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in D}} (\bar{S}(n) - p(n))^2 = \sum_{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\le x} [\bar{S}(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}) - p_1]^2$$

$$\ll \sum_{\substack{p_1^{\alpha_1}\le\sqrt{x}\\ \alpha_1\ge 2}} \sum_{p_2^{\alpha_2}\le\frac{x}{p_1^{\alpha_1}}} p_1^{2\alpha_1} + \sum_{p_2\le\sqrt{x}} \sum_{\substack{p_1^{\alpha_1}\le\frac{x}{p_2}\\ \alpha_1\ge 2}} p_2^2 \ll x^{\frac{7}{4}}. \qquad (6)$$

结合(2),(3),(5)及(6)式我们立刻得到渐近公式

$$\sum_{n\le x} (\bar{S}(n) - p(n))^2 = x^{\frac{5}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $p(n)$ 表示 n 的最小素因子, $b_1 = \frac{2}{5}$, $b_i\,(i = 2, 3, \cdots, k)$ 为可计算的常数.

于是完成了定理2的证明.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems[M]. Not Solutions, Chicago, Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Balacenoiu I, Seleacu V. History of the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 1999, 10: 192-201.

[3] Murthy A. Some notions on least common multiples[J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.

[4] Le Maohua. An equation concerning the Smarandache LCM function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.

[5] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York, Springer-Verlag, 1976.
[6] Lv Zhongtian. On the F. Smarandache LCM function and its mean value[J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.
[7] 潘承洞,潘承彪.素数定理的初等证明[M].上海:上海科学技术出版社, 1988.

The Value Distribution of a New F. Smarandache Function

ZHAO Hong-xing[1,2], YE Zheng-lin[1]

(1. School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi′an Shaanxi 710072, China)
(2. Department of Mathematics, Yulin College, Yulin Shaanxi 719000, China)

Abstract Aim: To define a new F. Smarandache function $\overline{S}(n)$, and study its value distribution problem. Methods: Using the elementary and analytic methods. Results: A mean square error theorem is given for $\overline{S}(n)$ and the smallest prime factor $p(n)$ of n. Conclusion: A sharper asymptotic formula is established.

Keywords a new F. Smarandache function; value distribution; mean square error theorem